SIMULARE EXAMEN DE BACALAUREAT
LA MATEMATICA

8.07.2014

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea: $1+4+7+...+x=145$.

(5p) 2. Fie x_1 şi x_2 soluțiile ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0, m\in R$. Să se demonstreze că expresia $m\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)$ nu depinde de m.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

(5p) 4. Să se afle termenul dezvoltării binomului $\left(\sqrt{a}+\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{150}$, $a>0$ care nu conţine pe a.

(5p) 5. Să se determine numărul real m astfel încât punctele $A(1,2m+1)$, $B(2,9)$ şi $C(4,4m+1)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $tg^2\alpha=8$, să se calculeze $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ x+y+mz+t=-1 \\ x-y+z+nt=p \end{cases}, m,n,p\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați *m, n* reali astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

(5p) b) În cazul în care rangul matricei sistemului este doi, determinați *p* pentru care sistemul este compatibil.

(5p) c) Dacă rangul matricei sistemului este doi și sistemul este compatibil, determinați soluțiile sistemului.

2. Se consideră polinomul $f\in Z_4[X]$, $f=X^3+aX+b$

(5p) a) Să se determine numărul polinoamelor f de această formă;

(5p) b) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+\hat{2}$;

(5p) c) Pentru $b=\hat{1}$ să se determine $a\in Z_4$ astfel încât polinomul f să nu admită rădăcini în $Z_4[X]$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to R$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

(5p) a) Calculaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

(5p) b) Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Arătaţi că şirul $a_n = \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$ este convergent.

2. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^n)\,dx$.

(5p) a) Calculaţi I_2;

(5p) b) Demonstraţi că $0 \le I_n \le \frac{1}{2n+1} (\forall) n \in \mathbb{N}^*$;

(5p) c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$.

BAREM

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ raţia progresiei, atunci $x = 1+3(n-1) = 3n-2$ $1+4+7+...+3n-2 = \frac{n}{2}\cdot(3n-1) \Rightarrow n(3n-1) = 290$, $n=10$ $x = 3n-2 = 30-2 = 28$.	1p 2p 2p
2.	Din relaţiile lui *Viete* $x_1 + x_2 = m+1$ şi $x_1 \cdot x_2 = m$ $\Rightarrow m\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 1\right) = m\frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2} =$ $= \cancel{m} \cdot \frac{\cancel{m}+1-\cancel{m}}{\cancel{m}} = 1$ nu depinde de m.	2p 3p
3.	Împărţind ecuaţia la $\sqrt{2}$, se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sin\frac{\pi}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$ atunci $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{150}^k \left(\sqrt{a}\right)^{150-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^k = C_{150}^k a^{\frac{150-k}{2}} \cdot 4^k \cdot a^{\frac{-k}{3}} = C_{150}^k 4^k \cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conţine $a \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{450-5k}{6} = 0 \Rightarrow 5k = 450 \Rightarrow k = 90$,	2p 1p 2p

	termenul fără a : $T_{91}=C_{150}^{90}4^{90}$.	
5.	$\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 4 & 4m+1 & 1\end{vmatrix}=0\underset{l_3-l_1}{\overset{l_2-l_1}{\Rightarrow}}\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 1 & 8-2m & 0\\ 3 & 2m & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 8-2m\\ 3 & 2m\end{vmatrix}=0$ adică $8m=24\Rightarrow m=3$	3p 2p
6.	$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2x}=\dfrac{1}{1+64}=\dfrac{1}{65}\Rightarrow$ $\overset{x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Rightarrow}\cos x=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & m & 1\\ 1 & -1 & 1 & n\end{pmatrix}$ matricea sistemului. $rangA=2$ dacă toți minorii de ordinul 3 sunt nuli. Deoarece $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, atunci rangul matricei poate fi 2 sau 3. $\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & m\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2-1-m-1+2m+1=m+1$ $\Delta_1=0\Leftrightarrow m+1=0\Leftrightarrow m=-1$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & n\end{vmatrix}=2n-1-1+1+2+n=3n+1$ $\Delta_2=0\Leftrightarrow 3n+1=0\Leftrightarrow n=-\dfrac{1}{3}$ Deci, pentru $m=-1$ și $n=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow rangA=2$.	 2p 2p 1p
b)	Considerăm $\Delta_p=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, ecuații principale: ecuațiile 1 și a 2-a, ecuații	

	secundare: ecuația a 3-a. Sistemul este compatibil dacă $\Delta_{car} = 0$. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p - 1 + 1 - 1 - 2 + p = 0 \Leftrightarrow 3p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 1$. Deci pentru $p = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat.	3p 2p
c)	Necunoscute principale: *x* și *y*, necunoscute secundare *z* și *t*. Fie $z = \alpha \in \mathbf{R}$ și $t = \beta \in \mathbf{R}$; rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 2x - y = 1 - \alpha + \beta \\ x + y = -1 + \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 + \alpha - \beta \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha - \beta - 1 \end{cases}$ Soluția sistemului $S = \{(0, \alpha - \beta - 1, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in R\}$	1p 2p 2p
2. a)	$a \in Z_4, b \in Z_4$ Se pot forma 16 polinoame	2p 3p
b)	$f = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$ Restul este $f\left(\hat{2}\right) = \hat{2}^3 + \hat{2} \cdot \hat{2} + \hat{2} =$ $= \hat{2}$	1p 2p 2p
c)	$f\left(\hat{0}\right) = \hat{1}$ $f\left(\hat{1}\right) = \hat{2} + a$ $f\left(\hat{2}\right) = \hat{0} + \hat{2}a + \hat{1}$ $f\left(\hat{3}\right) = \hat{3} + \hat{3}a + \hat{1} = \hat{3}a$ $a \in \left\{\hat{1}, \hat{3}\right\}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă că y=0 este asimptotă orizontală către $+\infty$. $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=\infty$, rezultă că x=0 este asimptotă verticală.	3p 2p
b)	$f'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)}$;x>0 $f'(x)<0,\ \ \forall x>0$ Funcţia f este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$	2p 2p 1p
c)	$a_n=\ln(n+2)-\ln(n+1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $0\in R\Rightarrow$ şirul (a_n) este convergent.	2p 2p 1p
2. a)	$I_2=\int_0^1 x^2\ln\left(1+x^2\right)dx=\dfrac{x^3}{3}\ln\left(1+x^2\right)\Big\|_0^1-\dfrac{2}{3}\int_0^1\dfrac{x^4}{x^2+1}dx=$ $=\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=$ $=\dfrac{4}{9}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\ln 2}{3}$	2p 1p 1p
b)	Demonstrarea relaţiei $\ln\left(1+x\right)\le x\ \left(\forall\right)x\ge 0$ $0\le\ln\left(1+x^n\right)\le x^n\ \ \left(\forall\right)x\in\left[0,1\right]$ $\Rightarrow 0\le x^n\ln\left(1+x^n\right)\le x^{2n}\ \ \left(\forall\right)x\in\left[0,1\right]$ $0\le I_n\le\dfrac{1}{2n+1},\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}^*$	1p 1p 1p 2p
c)	Criteriul cleştelui $\overset{b}{\Rightarrow}$ $\overset{b}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	2p 3p