

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați imaginea intervalului $[2;4]$ prin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.
- 5p 2. Calculați modulul numărului complex $z = \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^{2013}$.
- 5p 3. Determinați rangul termenului care îl conține pe x^3 în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{13}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4,5?
- 5p 5. Se dau punctele $A(-2,1)$, $B(4,3)$ și $C(0,-4)$ în reperul cartezian xOy . Determinați ecuația perpendicularei dusă din punctul C pe dreapta AB .
- 5p 6. Calculați $\cos 165^\circ + \sin 75^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ka & 0 & 1 \end{pmatrix}, a > -1 \right\}$, unde k este număr real fixat.
- 5p a) Arătați că $I_3 \in G$ și $O_3 \notin G$
- 5p b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a) = A(a+b+ab)$, oricare ar fi $A(a), A(b) \in G$
- 5p c) Folosind metoda inducției matematice, arătați că $A^n(a) = A((a+1)^n - 1)$, oricare ar fi $A(a) \in G, n \in \mathbb{N}^*$
2. Fie mulțimea $G = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ și legea $x * y = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}$.
- 5p a) Arătați că $x * y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in G$.
- 5p b) Arătați că $e = \frac{3}{2}$ este element neutru pentru legea „*”.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea G ecuația: $x * x * x * x = \frac{9}{16}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.
- 5p a) Demonstrați că funcția f este continuă pe $(0, \infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.
- 5p c) Demonstrați că f este strict descrescătoare pe domeniul de definiție.
2. Pentru fiecare n număr natural nenul, se consideră funcția $f_n: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5n}}$.
- 5p a) Calculați $\int 2x \cdot f_n^2(x) dx$, $x > 0$.
- 5p b) Calculați aria mulțimii mărginite de graficul funcției f_1 , axele de coordonate și dreapta $x = 1$.
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (f_n(1) + f_n(2) + \dots + f_n(n))$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru efectiv: 3 ore.