PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ M_mate-info

Varianta nr. 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2013}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:R\to R$ $f(x)=x^2+x+1$. Să se determine imaginea funcţiei f.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x+\log_8 x=8$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^{36}$.

5p **5.** Să se determine $m\in R$ ştiind că vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $x\in R$ astfel încât $\cos x=\frac{1}{4}+\sin x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $M_2(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, precum şi mulţimea $H=\{X(a)\mid a\in R, X(a)=I_2+aA\}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in H$.

5p **b)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice $X(a),X(b)\in H$.

5p **c)** Să se arate că $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2013)=X(2014!-1)$.

2. Se consideră cunoscut că $(Z,*,\circ)$ este un inel comutativ unde $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3x-3y+12$, $x,y\in Z$.

5p **a)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$".

5p **b)** Determinaţi $a,b\in Z$ astfel încât între inelele $(Z,*,\circ)$ şi $(Z,+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:Z\to Z$, $f(x)=ax+b$.

5p **c)** Rezolvaţi în Z ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2013 \text{ ori}}=2^{2013}+3$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}$.

5p **c)** Să se demonstreze inegalitatea $f(x)\geq 0, \forall x\in R$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\cos 2x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător.

5p **c)** Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi determinaţi limita sa.