

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 puncte)

- 5p 1. Se consideră mulțimile $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ și $B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$. Să se calculeze $(A \cup B) - (A \cap B)$.
- 5p 2. O persoană a cheltuit 20% dintr-o sumă și încă 160 lei din ea. Să se determine suma inițială, știind că i-a rămas 75% din aceasta.
- 5p 3. În triunghiul ABC se știe că $AD \perp BC$, $D \in BC$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ și $AD = 1$. Să se calculeze lungimea segmentului BD.
- 5p 4. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$$
- 5p 5. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 4$.
- 5p 6. Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -3\vec{i}$, $\vec{w} = 5\vec{j}$. Să se calculeze vectorul $\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat de relațiile $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n * 5$, $\forall n \geq 1$.

- 5p a) Să se arate că $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p c) Să se arate că legea "*" admite element neutru pe \mathbb{R} .
- 5p d) Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ împreună cu legea "*" formează o structură de grup.
- 5p e) Să se calculeze x_5 .
- 5p f) Se definește șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = x_n - 3$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că numerele y_2, y_3, y_4, y_5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \right\}$ și matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p a) Pentru $a=2$, $b=5$, $x=-2$ să se calculeze $A + 3I_2$.
- 5p b) Să se determine $a, b, x \in \mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2-b \\ b & a+3 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Știind că $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \in M$ și că $\det(A) = 0$, să se determine $x \in \mathbb{R}$.
- 5p d) Să se determine $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$, astfel încât $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p e) Să se arate că matricea $A \in M$, $A = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$ verifică relația $A^2 - 2xA + (x^2 - ab)I_2 = O_2$.
- 5p f) Să se determine matricea $X \in M$ știind că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.